Dr. Martin Jesenko
Dr. Andrea Korsch

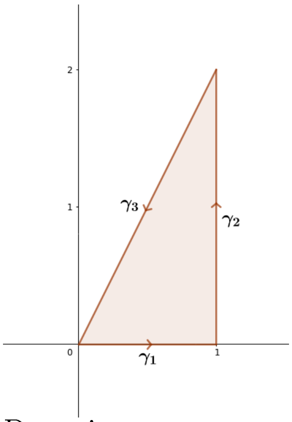
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Mathematisches Institut

Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens

im Sommersemester 2018

Lösungen zum Übungsblatt 11

1. Der Rand besteht aus Strecken γ_1, γ_2 und γ_3 mit Orientierungen wie auf dem Bild.



Auf der Strecke γ_1 ist $y = 0$ und deswegen $\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Folglich müssen wir keine Parametrisierung finden und es gilt

$$\int_{\gamma_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = 0.$$

Die zweite Strecke können wir parametrisieren wie folgt:

$$\gamma_2 : [0,2] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\boldsymbol{F}(\gamma_2(t)) = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \gamma_2'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Somit

$$\int_{\gamma_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_0^2 \langle \boldsymbol{F}(\gamma_2(t)), \gamma_2'(t) \rangle \; dt = \int_0^2 \left\langle \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \; dt = \int_0^2 t^3 \; dt = \left[\frac{t^4}{4} \right]_0^2 = 4.$$

Die einfachste Parametrisierung für den dritten Teil ist

$$\tilde{\gamma}_3 : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \tilde{\gamma}_3(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}.$$

Allerdings ergibt sie die falsche Orientierung, was wir bei dem Vorzeichen berücksichtigen müssen. Es gilt

$$\boldsymbol{F}(\tilde{\gamma}_3(t)) = \begin{pmatrix} t \cdot 2t \\ t^2 \cdot (2t)^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ 8t^5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{\gamma}_3'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist

$$\int_{\gamma_3} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = -\int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 2t^2 \\ 8t^5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \; dt = -\int_0^1 (2t^2 + 16t^5) \; dt = -\left[\frac{2t^3}{3} + \frac{16t^6}{6} \right]_0^1 = -\frac{10}{3}.$$

Also ist

$$\int_{\partial D} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{\gamma_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} + \int_{\gamma_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} + \int_{\gamma_3} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = 0 + 4 - \frac{10}{3} = \frac{2}{3}$$

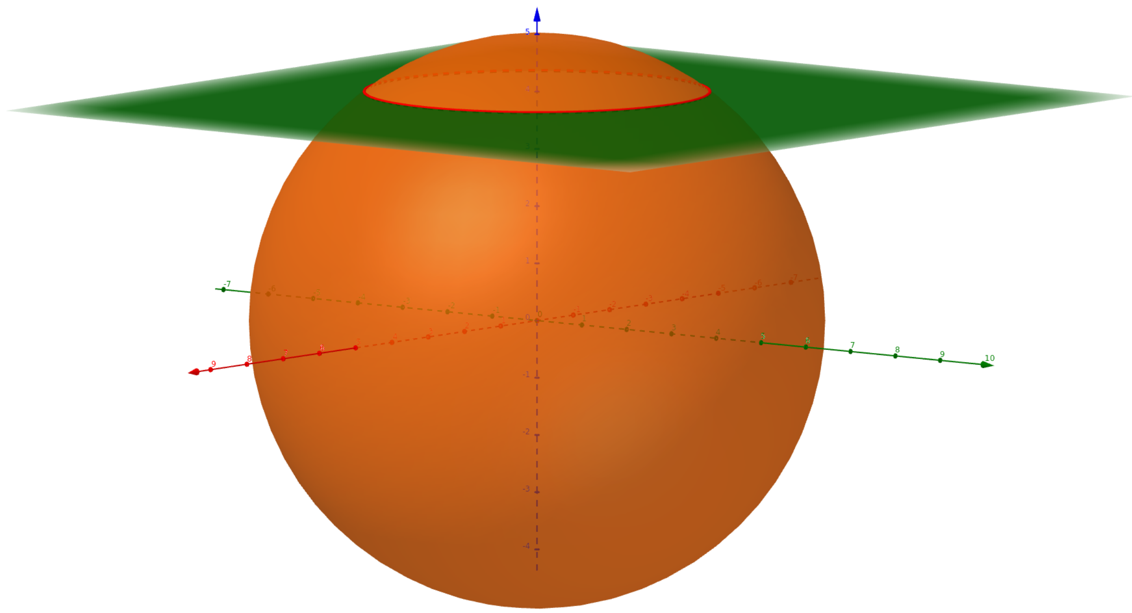
Nach dem Satz von Green ist dieses Kurvenintegral gleich dem Integral der Funktion

$$\partial_1 F_2(x,y) - \partial_2 F_1(x,y) = 2xy^3 - x$$

über D. In der Tat ist

$$\begin{aligned}
\int_D (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)\; dx\; dy &= \int_0^1 \int_0^{2x} (2xy^3 - x)\; dy\; dx \\
&= \int_0^1 \left[2x\frac{y^4}{4} - xy\right]_0^{2x} dx \\
&= \int_0^1 (8x^5 - 2x^2)\; dx \\
&= \left[8\frac{x^6}{6} - 2\frac{x^3}{3}\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

2. Die angegebene Fläche ist der Teil der Oberfläche einer Kugel mit Radius $r = 5$, die in einer Höhe $h = 4$ abgeschnitten wurde.



Für die Parametrisierung können wir Kugelkoordinaten θ und φ mit festem $r = 5$ verwenden:

$$\mathbf{\Phi}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} 5\sin\theta\cos\varphi \\ 5\sin\theta\sin\varphi \\ 5\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Welche Paare (θ, φ) bestimmen Punkte auf dieser Kugelkappe? θ ist der Winkel zwischen der z-Achse und dem Ortsvektor, also ist am größten auf der roten Linie, die die Schnittmenge der Sphäre und der Ebene bezeichnet. Dort ist $\cos\theta = \frac{4}{5}$, bzw. $\theta = \arccos\frac{4}{5}$. Zu jedem θ gehört eine Kreislinie, also $\varphi \in (0, 2\pi)$. Wir berechnen die Tangentialvektoren

$$\partial_\theta \mathbf{\Phi}(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} 5\cos\theta\cos\varphi \\ 5\cos\theta\sin\varphi \\ -5\sin\theta \end{pmatrix}, \qquad \partial_\varphi \mathbf{\Phi}(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} -5\sin\theta\sin\varphi \\ 5\sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) In der Vorlesung wurden die Grössen E, F, G für das Oberflächenintegral eingeführt und im Falle einer Kugel berechnet. Es ist:

$$\begin{aligned} E(\theta,\varphi) &= \big\langle \partial_\theta \mathbf{\Phi}(\theta,\varphi), \partial_\theta \mathbf{\Phi}(\theta,\varphi) \big\rangle = 25, \\ F(\theta,\varphi) &= \big\langle \partial_\theta \mathbf{\Phi}(\theta,\varphi), \partial_\varphi \mathbf{\Phi}(\theta,\varphi) \big\rangle = 0, \\ G(\theta,\varphi) &= \big\langle \partial_\varphi \mathbf{\Phi}(\theta,\varphi), \partial_\varphi \mathbf{\Phi}(\theta,\varphi) \big\rangle = 25\sin^2\theta. \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt ist dann

$$S = \int_0^{\arccos\frac{4}{5}} \int_0^{2\pi} \sqrt{EG - F^2}\; d\varphi\; d\theta = 2\pi \int_0^{\arccos\frac{4}{5}} 25\sin\theta\; d\theta = 50\pi[-\cos\theta]_0^{\arccos(\frac{4}{5})} = 10\pi.$$

(b) Wir berechnen zunächst das Vektorprodukt

$$\begin{aligned} \partial_\theta \mathbf{\Phi}(\theta,\varphi) \times \partial_\varphi \mathbf{\Phi}(\theta,\varphi) &= \begin{pmatrix} 0 + 25\sin\theta\sin\theta\cos\varphi \\ 25\sin^2\theta\sin\varphi - 0 \\ 25\cos\theta\cos\varphi\sin\theta\cos\varphi + 25\cos\theta\sin\varphi\sin\theta\sin\varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 25\sin\theta\sin\theta\cos\varphi \\ 25\sin^2\theta\sin\varphi \\ 25\cos\theta\sin\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \end{pmatrix} = 5\sin\theta \begin{pmatrix} 5\sin\theta\cos\varphi \\ 5\sin\theta\sin\varphi \\ 5\cos\theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bis auf den Vorfaktor entspricht das dem Vektor $(x, y, z)^T$, was anschaulich bei der Kugel die richtige Normale ist. Wir bemerken noch, dass die letzte Komponente positiv ist, also berechnen wir den Fluss von unten nach oben. Weiter ist

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \Rightarrow \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen den Fluss dieses Vektorfeldes durch die Fläche M berechen.
Mit $a(x, y, z)^T \cdot (-y, x, 1)^T = az$, $a \in \mathbb{R}$ und $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$, gilt:

$$\begin{aligned} \int_M \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} &= \int_0^{\arccos 4/5} \int_0^{2\pi} \Big\langle \operatorname{rot} \boldsymbol{F}(\mathbf{\Phi}(\theta,\varphi)), \partial_\theta \mathbf{\Phi}(\theta,\varphi) \times \partial_\varphi \mathbf{\Phi}(\theta,\varphi) \Big\rangle\; d\varphi\; d\theta \\ &= \int_0^{\arccos 4/5} \int_0^{2\pi} 25\sin\theta\cos\theta\; d\varphi\; d\theta = \int_0^{\arccos 4/5} 2\pi \cdot 25\sin\theta\cos\theta\; d\theta \\ &= 50\pi[-1/2\cos^2\theta]_0^{\arccos 4/5} = 25\pi(1 - (4/5)^2) = 9\pi. \end{aligned}$$

Mit dem Satz von Stokes gilt andererseits:

$$\int_M \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\partial M} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s},$$

wobei auf der rechten Seite das Kurvenintegral steht und ∂M in unserem Fall die rote Linie, d. h. der Kreis mit Radius $r' = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ ist. Als Parametrisierung wählen wir

$$\boldsymbol{\gamma}(\varphi) = \begin{pmatrix} 3\cos\varphi \\ 3\sin\varphi \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \varphi \in (0, 2\pi).$$

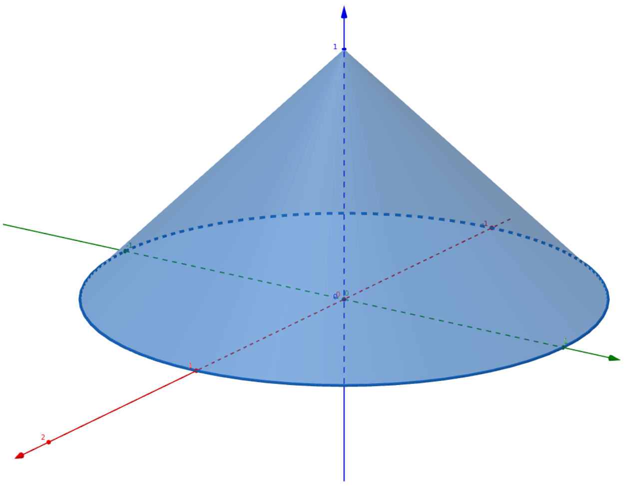
Die Orientierung ist positiv bezüglich der gewählten Orientierung von M. Dann ist

$$\boldsymbol{\gamma}'(\varphi) = \begin{pmatrix} -3\sin\varphi \\ 3\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\gamma}(\varphi)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3\cos\varphi \\ -\frac{1}{2}(3\cos\varphi)^2 - \frac{1}{2}(3\sin\varphi)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3\cos\varphi \\ -\frac{9}{2} \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} &= \int_0^{2\pi} \langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\gamma}(\varphi)), \boldsymbol{\gamma}'(\varphi) \rangle \, d\varphi = \int_0^{2\pi} 9\cos^2\varphi \, d\varphi \\ &= 9[\tfrac{1}{2}(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)]_0^{2\pi} = 9 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 2\pi = 9\pi. \end{aligned}$$

3. Es handelt sich um den Mantel des Kegels mit Grundfläche auf der xy-Ebene, mit z-Achse als Symmetrieachse und mit Radius und Höhe 1. Wir parametrisieren den Kegel mit φ und z. In der Höhe z haben wir einen Kreis mit Radius $1 - z$.



Also

$$\boldsymbol{\Phi}(\varphi, z) = \begin{pmatrix} (1-z)\cos\varphi \\ (1-z)\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{aligned} x &= (1-z)\cos\varphi \\ y &= (1-z)\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}$$

Dann ist

$$\partial_\varphi \boldsymbol{\Phi}(\varphi, z) = \begin{pmatrix} -(1-z)\sin\varphi \\ (1-z)\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_z \boldsymbol{\Phi}(\varphi, z) = \begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\partial_\varphi \boldsymbol{\Phi}(\varphi, z) \times \partial_z \boldsymbol{\Phi}(\varphi, z) = \begin{pmatrix} -(1-z)\sin\varphi \\ (1-z)\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-z)\cos\varphi \\ (1-z)\sin\varphi \\ 1-z \end{pmatrix}.$$

Wir bemerken, dass dieser Normalvektor als obere Seite die äußere Seite bestimmt. Der Fluss durch M ist nach der Definition gleich

$$\int_M \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \Big\langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Phi}(\varphi, z)), \partial_\varphi \boldsymbol{\Phi}(\varphi, z) \times \partial_z \boldsymbol{\Phi}(\varphi, z) \Big\rangle \, d\varphi \, dz.$$

Aus

$$\begin{aligned}
&\Big\langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Phi}(\varphi, z)), \partial_\varphi \boldsymbol{\Phi}(\varphi, z) \times \partial_z \boldsymbol{\Phi}(\varphi, z) \Big\rangle \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} (1-z)\cos\varphi \\ (1-z)\sin\varphi \\ z^2((1-z)\cos\varphi + 1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (1-z)\cos\varphi \\ (1-z)\sin\varphi \\ 1-z \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= (1-z)^2\cos^2\varphi + (1-z)^2\sin^2\varphi + z^2(1-z)^2\cos\varphi + z^2(1-z) \\
&= (1-z)^2 + z^2(1-z)^2\cos\varphi + z^2(1-z) \\
&= 1 - 2z + 2z^2 - z^3 + z^2(1-z)^2\cos\varphi
\end{aligned}$$

folgt:

$$\begin{aligned}
\int_M \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \Big(1 - 2z + 2z^2 - z^3 + z^2(1-z)^2\cos\varphi\Big) \, d\varphi \, dz \\
&= \int_0^1 \Big[(1 - 2z + 2z^2 - z^3)\varphi + z^2(1-z)^2\sin\varphi\Big]_0^{2\pi} \, dz \\
&= \int_0^1 2\pi(1 - 2z + 2z^2 - z^3) \, dz \\
&= 2\pi\left[z - z^2 + \frac{2z^3}{3} - \frac{z^4}{4}\right]_0^1 \\
&= \frac{5\pi}{6}.
\end{aligned}$$

Jetzt bestimmen wir diesen Wert noch mit dem Satz von Gauß. Bezeichne K den entsprechenden (vollen) Kegel. Zuerst bemerken wir, dass der Rand von K aus dem Mantel M und der Grundfläche G besteht. Nach dem Satz von Gauß ist

$$\int_K (\operatorname{div} \boldsymbol{F}) \, dV = \int_{\partial K} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_M \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} + \int_G \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}.$$

Auf der Grundfläche ist die äußere Einheitsnormale $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{e}_3$. Da $z = 0$ für alle Punkte aus G gilt, ist $\langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{n} \rangle = -F_3 = 0$. Also

$$\int_G \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

und

$$\int_M \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_K (\operatorname{div} \boldsymbol{F})(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Der Integrand ist

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F}(x, y, z) = 1 + 1 + 2z(x + 1).$$

Wir werden die zylindrischen Koordinaten verwenden. Die Jacobi-Determinante für den Wechsel zu den zylindrischen Koordinaten haben wir bereits in der Vorlesung berechnet:

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)}\right| = r.$$

Mögliche z sind aus $[0,1]$. Auf der Höhe z haben wir einen Kreis mit Radius $1-z$, also

$$\begin{aligned}
\int_K (\operatorname{div} \boldsymbol{F})\ dV &= \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{2\pi} 2(1+z(r\cos\varphi+1))\ r\ d\varphi\ dr\ dz \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-z} 2(1+z)\cdot 2\pi\ r\ dr\ dz \\
&= \int_0^1 \Big[2\pi(1+z)r^2\Big]_0^{1-z}\ dz \\
&= 2\pi \int_0^1 (1+z)(1-z)^2\ dz \\
&= 2\pi \int_0^1 (1-z-z^2+z^3)\ dz \\
&= 2\pi \left[z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4}\right]_0^1 \\
&= \frac{5\pi}{6}.
\end{aligned}$$